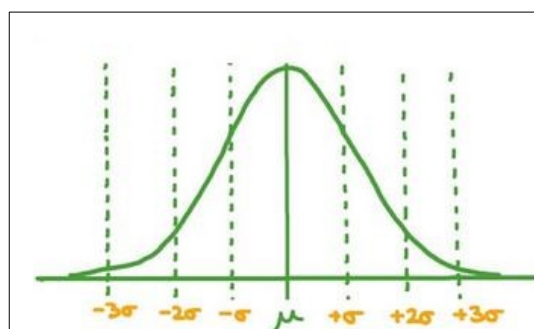


Indicateur 3-Sigma

(13 Février 2024)

1 – Rappels brefs sur la loi de distribution Normale ou Gaussienne

Le théorème central limite nous dit que lorsqu'une caractéristique quantitative mesurable d'un phénomène observé est dû à une somme de nombreuses variables aléatoires indépendantes alors cette caractéristique tend vers une variable aléatoire dont la distribution est Normale (ou Gaussienne). La loi Normale est une loi de distribution qui se retrouve partout dans la nature mais il n'y a pas que les phénomènes naturels qui conduisent à des distributions normales. Lors de processus industriels, des observations analogues sont faites.



Pour caractériser une loi Normale, deux paramètres suffisent : la moyenne (μ) et l'écart-type (σ).

La moyenne représente la mesure la plus observée dans la population et l'écart-type caractérise la dispersion autour de la moyenne.

L'aire sous la courbe nous donne les densités de population. Ainsi nous avons :

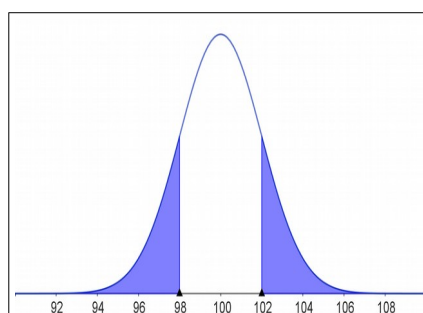
si $-\sigma < x < +\sigma$: aire = 68,27 % de la pop.

si $-2\sigma < x < +2\sigma$: aire = 95,45 % de la pop.

si $-3\sigma < x < +3\sigma$: aire = 99,73 % de la pop.

Exemple : dans un laboratoire, une machine fabrique 300000 comprimés à l'heure. La masse nominale du comprimé est de 100 mg et l'écart-type observé est de 2 mg.

Les paramètres de la machine étant parfaitement réglés et maintenus constants alors on constatera que la masse de ces comprimés suit une loi normale $N(100,2)$ et les densités de probabilité pourront se lire comme les aires situées sous la courbe et, ainsi :



En considérant 1 écart-type :

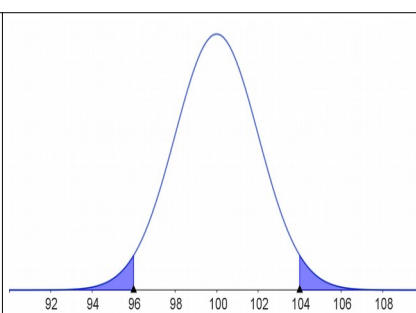
$$P(X \leq 98) + P(X \geq 102) = 0,1587 + 0,1587 = 0,3174$$

soit env. 31,7 %

Ou

$$P(98 \leq X \leq 102) = 0,6826$$

soit env. 68,3 %



En considérant 2 écart-types :

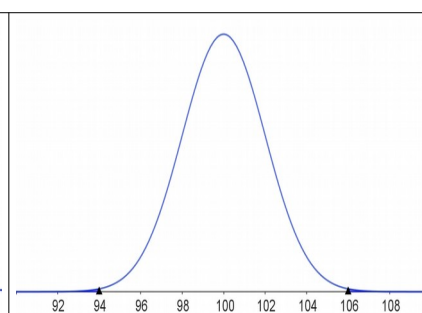
$$P(X \leq 96) + P(X \geq 104) = 0,0228 + 0,0228 = 0,0455$$

soit env. 4,55 %

Ou

$$P(96 \leq X \leq 104) = 0,9545$$

soit env. 95,5 %



En considérant 3 écart-types :

$$P(X \leq 94) + P(X \geq 106) = 0,0013 + 0,0013 = 0,0027$$

soit env. 0,27 %

Ou

$$P(94 \leq X \leq 106) = 0,9973$$

soit env. 99,73 %

Indicateur 3-Sigma

(13 Février 2024)

On peut voir que 99,73 % de la population voit la masse osciller entre 94 et 106 mg.

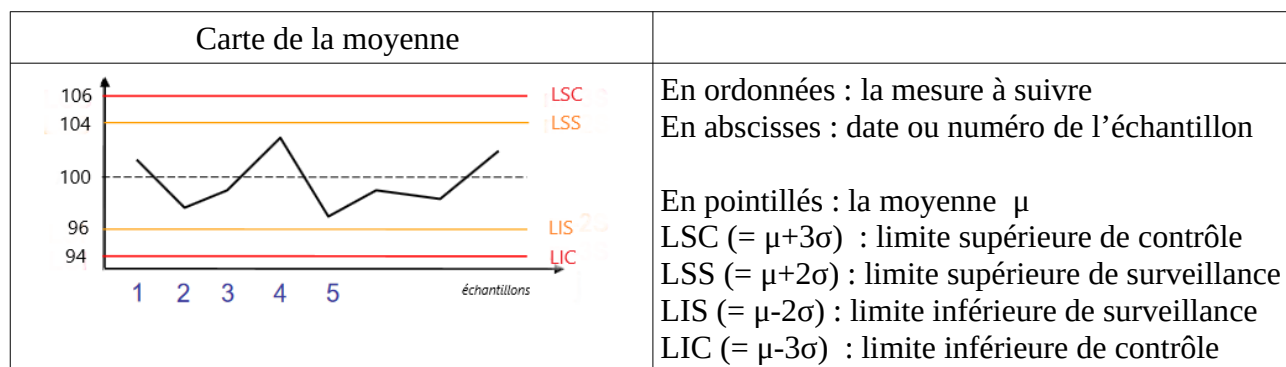
Comme la probabilité de faire une mesure plus grande que 106 ou plus petite que 94 est extrêmement faible, si l'événement survient et qu'ainsi, à un moment donné, on observe des masses égales à 106, 108, 110, 109, ..., alors dans un tel cas, on peut affirmer que la masse des comprimés ne suit plus la loi normale attendue. Cette masse n'est plus seulement le résultat de la variation d'une multitude de petites causes indépendantes mais elle est aussi et surtout le résultat brusque d'au moins une cause importante non identifiée. **Le procédé n'est plus sous contrôle et il convient d'investiguer.**

2 - Cartes de contrôle

(N.B. : présentation très succincte et donc très imparfaite. Pour davantage d'informations, se reporter à des ouvrages sur le contrôle de qualité)

Comment suivre un procédé industriel et décider si tout va bien ou pas ?

Cela se fera, dans notre exemple, en échantillonnant les masses des comprimés produits régulièrement et en traçant des cartes de contrôle. Il existe différents types de cartes de contrôle mais la plus ancienne et la plus simple est la carte de Shewhart.



Procédé sous contrôle : les mesures faites se situent aléatoirement au-dessus ou au-dessous de la moyenne et il n'y a pas de mesures supérieures à LSC ou inférieures à LIC.

Il n'y a pas sur cette figure, mais il pourrait y avoir, de rares mesures entre LSS et LSC ou entre LIS et LIC.

En fait, une demi-douzaine d'autres critères seraient à étudier avant de conclure à un procédé sous ou hors contrôle.

3 - Loi Normale centrée-réduite N(0,1)

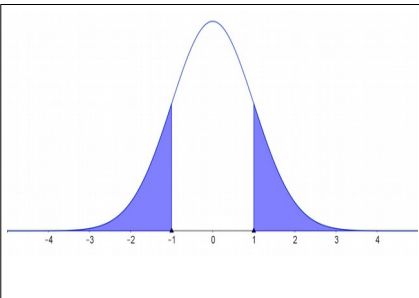
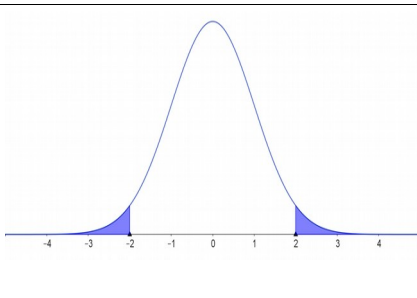
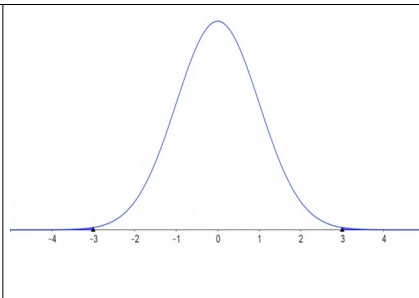
Plutôt que de rester avec une loi de distribution $N(\mu, \sigma)$, on utilisera souvent une loi de distribution $N(0,1)$ dite loi Normale centrée réduite. On l'obtient en faisant un changement de variables des mesures faites : tout X mesuré est remplacé par la variable calculée $Z = (X - \mu) / \sigma$.

Ainsi $X = 100$ se transforme en $Z = (100-100)/2 = 0$

$X = 102$ devient $Z = (102-100)/2 = 1$

$X = 98$ devient $Z = (98-100)/2 = -1$

$X =$ etc

		
En considérant 1 écart-type : $P(Z \leq -1) + P(Z \geq 1) =$ $0,1587 + 0,1587 = 0,3174$ soit env. 31,7 %	En considérant 2 écart-types : $P(Z \leq -2) + P(Z \geq 2) =$ $0,0228 + 0,0228 = 0,0455$ soit env. 4,55 %	En considérant 3 écart-types : $P(Z \leq -3) + P(Z \geq 3) =$ $0,0013 + 0,0013 = 0,0027$ soit env. 0,27 %
Ou $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826$ soit env. 68,3 %	Ou $P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,9545$ soit env. 95,5 %	Ou $P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,9973$ soit env. 99,73 %

N.B. : les variables Z sont **a-dimensionnelles** puisque qu'elles sont le rapport de 2 grandeurs s'exprimant dans la même unité. Donc, qu'on mesure des m^2 , des kg ou des $€$, ces mesures, une fois centrées et réduites nous donnent des Z qui sont des **écarts à la moyenne mesurés en nombre d'écart-types**.

On remarque évidemment que les densités de population pour les données en X sont les mêmes que celles données en Z , pour des points correspondants. Par exemple :

$$P(96 \leq X \leq 104) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,9545$$

Question : si la distribution des données n'est pas gaussienne, peut-on centrer et réduire ces données ?

La réponse est oui, on peut toujours centrer et réduire des mesures mais il convient d'avoir suffisamment de valeurs pour que la moyenne et l'écart-type soient estimés correctement.

Indicateur 3-Sigma

(13 Février 2024)

4 - Carte de Shewhart de la moyenne avec valeurs centrées-réduites

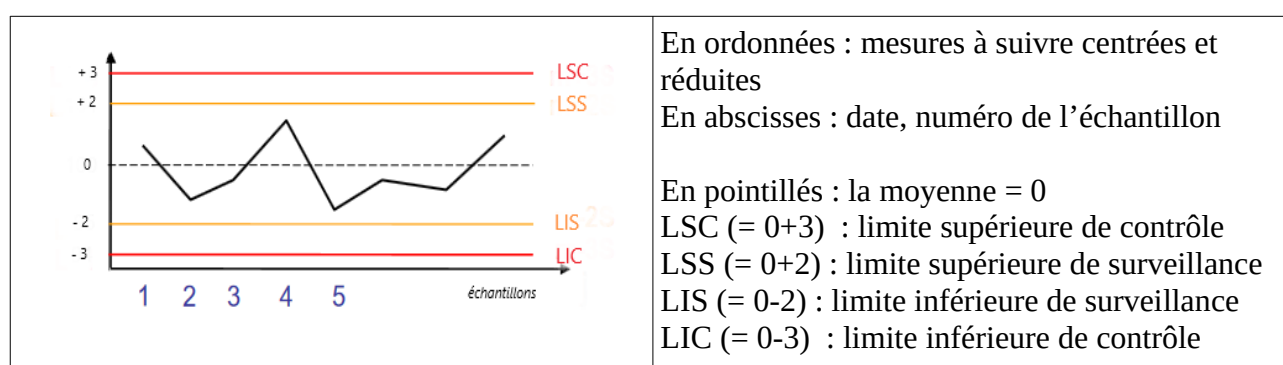
La moyenne qui valait 100 mg exprimée en valeur naturelle vaut maintenant 0 exprimée en Z.
Chacune des mesures réalisées sera exprimée ici par son écart à la moyenne exprimée en nombre d'écart-types.

Soit un comprimé pesant 99 mg alors $Z = (99-100)/2 = -0,5$

On reportera donc sur la carte -0,5 pour cet échantillon.

Si le comprimé pèse 103 mg on reportera un $Z = +1,5$

etc ...



Avantage de cette représentation : même si les valeurs reportées sur cette carte ne sont pas bornées, l'essentiel de leurs variations seront contenues dans un intervalle $[-3 ; +3]$ et la moyenne sera toujours égale à zéro.

5 – Description de l'indicateur 3-Sigma

Quelles que soient les valeurs boursières observées, ces valeurs ne suivent absolument pas une loi de distribution normale. Pour s'en convaincre, on peut simplement remarquer que :

- il n'y a pas de moyenne arithmétique fixe
- les valeurs croissent pendant un temps puis décroissent pendant un autre à moins qu'elles n'oscillent dans un range.

On peut malgré tout calculer, sur une période donnée, une moyenne et un écart-type glissants. Enfin, pour chaque valeur du cours, on peut calculer un écart à la moyenne exprimé en nombre d'écart-types. Ensuite on peut tracer une carte de contrôle et voir le comportement.

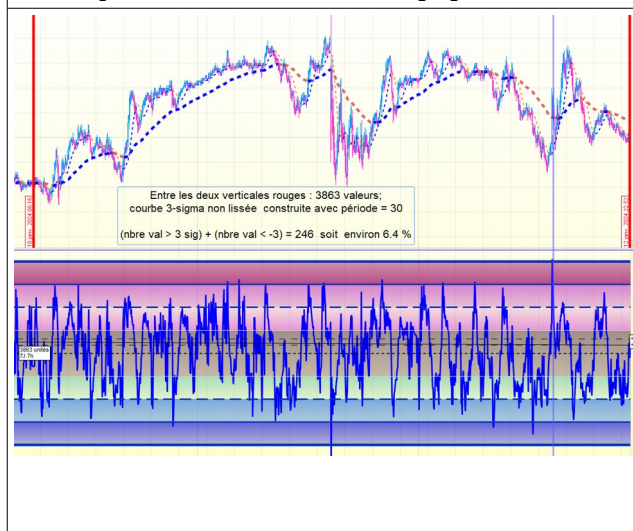
Indicateur 3-Sigma (13 Février 2024)



Dans cette figure, on peut constater la variation cyclique des valeurs observées mais aussi des écarts centrés réduits (ECR).

Ces ECR ne suivent pas une loi de distribution normale, malgré tout, les valeurs des écarts à la moyenne mesurés en nombre d'écart-types apparaissent contenues dans un intervalle $[-3 ; +3]$

A l'instar d'une population normale, on peut vérifier que plus on s'éloigne de la valeur centrale 0, plus la densité de population est faible et, plus étrange, ces densités de population sont du même ordre que celles relatives à une population normale.



Exemple de vérification :

sur 3863 valeurs observées, le total des ECR supérieurs à 2σ additionnés des ECR inférieurs à -2σ est de 246 soit : environ 6,4 % des valeurs.

Si la distribution était normale nous ne devrions pas dépasser la valeur de 4,5 %.

Si on fait un lissage des valeurs de l'indicateur, on se rapproche un peu plus de la valeur trouvée pour une population normale.

Après avoir fait plusieurs de ces calculs sur différentes valeurs, différentes unités de temps, différentes périodes pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type, les valeurs calculées se rapprochent toujours des valeurs observées pour une distribution normale. C'est un fait remarquable alors que, les distributions observées ne sont pas normales.

Cette dernière remarque fait penser à l'hypothèse suivante :

- si les ECR sont essentiellement contenus dans l'intervalle $[-3 ; +3]$ alors les variations des cours ne sont dus qu'à des causes multiples simples et habituelles. A un moment, la résultante de ces

Indicateur 3-Sigma (13 Février 2024)

forces conduit à un accroissement régulier du cours, à un autre moment, ce sera une décroissance régulière. Dans chacune de ces phases, les variations des cours se font au travers de cycles lents, réguliers : « *le procédé est sous contrôle* » (l'expression ici est évidemment trompeuse, personne ne tient le procédé de variation des cours sous contrôle mais tout se passe comme si ...).

- si les ECR viennent à sortir de l'intervalle $[-3 ; +3]$, le procédé n'est plus sous contrôle. Une ou plusieurs nouvelles causes puissantes, imprévues se font sentir et un comportement brutal des cours prend place pendant un temps plus ou moins long avant que tout redevienne plus calme et que les ECR se recalent dans l'intervalle habituel.

4 – Tracé de l'indicateur



L'indicateur est tracé ici pour trois périodes (20 [blanc], 60 [bleu], 180 [marron]).

Les 3 tracés peuvent se placer sur le même graphe sans souci car, rappel, ils ont même moyenne (= 0) et les valeurs sont toutes adimensionnelles et situées dans un même intervalle.

Suivons le tracé bleu, par exemple, il est clair que s'il atteint ou dépasse 2 (horizontale pointillée dans la zone rouge) ou bien s'il atteint ou dépasse -2 (horizontale pointillée dans la zone bleue) alors le cours va prochainement changer de direction.

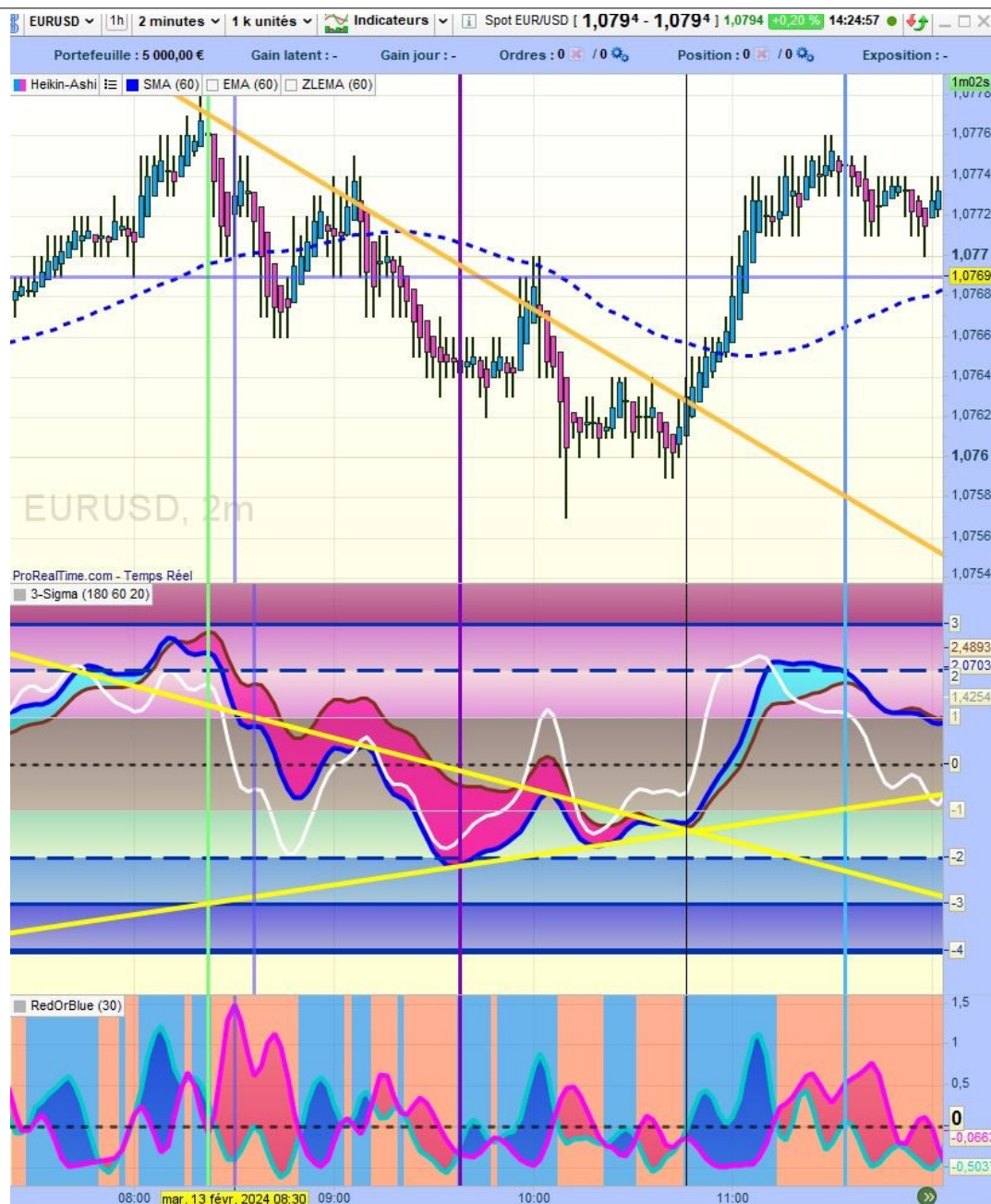
Evidemment si on atteint ou dépasse ± 3 , l'urgence est plus forte.

Dans le panneau supérieur figure la moyenne 60 (en pointillés bleus). Notez que lorsque les cours croisent cette moyenne alors l'ECR correspondant croise l'horizontale 0.

Les croisements des différentes courbes sont également à suivre.

N.B. : attention à ne pas choisir des valeurs trop faibles pour les périodes, cela pourrait conduire à des calculs d'ECR aberrants.

Indicateur 3-Sigma (13 Février 2024)



Bien évidemment, l'ajout d'un autre indicateur pourra se révéler utile pour décider d'une action à prendre et à quel moment précis la prendre.

Ici, on a placé RoB sous 3-Sigma.

Suggestions : lignes de support et résistance, divergence entre indic et cours, etc ...

Indicateur 3-Sigma (13 Février 2024)

5 – Programme ProRealTime®

```
//-----  
//      3-Sigma Chart  
//      G. GOUSSET  
//      13 Février 2023  
//-----  
  
// Périodes : mieux vaut les placer en variables externes  
TLongPer = 180  
LongPer = 60  
ShortPer = 20  
//-----  
  
// centrage réduction des données  
a = (close - Average[TLongPer](close))/STD[TLongPer](close)  
b = (close - Average[LongPer](close))/STD[LongPer](close)  
c = (close - Average[ShortPer](close))/STD[ShortPer](close)  
//-----  
  
// lissage des valeurs  
r = 4  
s = 3  
u = 2  
ValTLong = average[u](average[s](average[r](a)))  
ValLong = average[u](average[s](average[r](b)))  
ValShort = average[u](average[s](average[r](c)))  
//-----  
  
// niveaux intéressants à repérer  
zero = 0  
un = 1  
deux = 2  
trois = 3  
mun = -1  
mdeux = -2  
mtrois = -3  
quatre = 4  
mquatre = -4  
// -----  
  
// graphes  
Return ValTLong coloured (132,46,27,300) as "Sig Très Long", ValLong coloured (0,0,255) as "Sig Long", ValShort coloured (255,255,255,250) as "Sig Short", zero  
coloured (18,13,22) as "ligne zéro",deux coloured (1,49,180) as "2", trois coloured (1,49,180) as "3", mdeux coloured (1,49,180) as "-2", mtrois coloured (1,49,180) as "-3",  
un coloured (206,206,206) as "1", mun coloured (206,206,206) as "-1",quatre coloured (1,49,180) as "4",mquatre coloured (1,49,180) as "-4"
```


6 – Conclusion

Quel que soit le cours suivi, celui-ci passera par des extrema locaux difficiles à anticiper. Il est donc intéressant de modéliser ce cours de telle façon que ses valeurs extrêmes modélisées soient contenues dans un intervalle donné. Cette caractéristique pourra alors être mise à profit pour prendre position avec une probabilité de réussite accrue.

Toutefois, comme pour tout indicateur, l'information suggérée n'est pas certaine à 100 % et il sera utile de lui adjoindre un ou deux autres paramètres pour mieux appréhender la situation.

L'indic 3-Sigma demandera un peu de temps à tout nouvel utilisateur pour s'y accoutumer et en voir tout l'intérêt mais l'effort se verra récompensé très probablement.